

La enseñanza de la Geometría en el espacio iberoamericano

Equipo de estudio (*Survey Team*)

Jaime Carvalho e Silva (coordinador)

Autores: Rubén Alejandro Águeda Altúzar, Julio Rodríguez Taboada, María del Carmen Bonilla-Tumialan, Cristina Loureiro, José Manuel dos Santos dos Santos, Tomás Recio

La ICMI-Comisión Internacional de Instrucción Matemática está realizando un estudio internacional sobre la Enseñanza de la Geometría cuyos objetivos son:

(...) en primer lugar, **informar el estado del campo de la educación matemática en el área de la enseñanza de la Geometría** con respecto a la teoría, la investigación, la práctica y la política; y en segundo lugar, **sugerir nuevas direcciones de investigación que consideren las dimensiones contextuales, culturales, nacionales y políticas de la práctica** (ICMI, 2023).

Otros objetivos pueden aparecer asociados a estos, como comprender los desafíos que enfrenta **la enseñanza de la geometría en diferentes contextos**, explorar el papel de la Geometría como arena o palanca para el **desarrollo de la creatividad matemática** y el pensamiento flexible en niños y adolescentes a través de conjeturas, formulación de problemas y prueba de teoremas, el lugar de **la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría en el diseño del plan de estudios de Matemáticas** u otras materias, el papel y **el impacto del uso de las tecnologías** en la enseñanza de la Geometría (ICMI, 2023).

Sería interesante que se pudieran producir **conjuntos de recomendaciones sobre recursos eficaces para investigadores, docentes, formadores de docentes, formuladores de políticas, diseñadores de currículos, analistas y una amplia gama de profesionales en matemáticas y educación matemática** (ICMI, 2023).

Todos estos objetivos son muy estimulantes y será interesante reflexionar sobre lo que **está sucediendo en el espacio iberoamericano** en cuanto a las prácticas de enseñanza de la Geometría, en cuanto a las dificultades encontradas y cuáles son las **perspectivas deseables de evolución** en la enseñanza de la Geometría. Por tanto, será importante saber:

- a) En primer lugar, ¿cuál es **el estado actual de la enseñanza de la Geometría en el espacio iberoamericano**, en diferentes países y regiones?
- b) En segundo lugar, ¿**qué sugerencias podemos ofrecer** a los investigadores en educación matemática, a los docentes y a los tomadores de decisiones políticas en el espacio iberoamericano?

Este documento contiene una introducción general y varias contribuciones para estimular la discusión durante el CIBEM 2025. Esta publicación podrá ampliarse posteriormente para integrarse en las Actas

La enseñanza de la Geometría en el espacio iberoamericano

de CIBEM 2025 o ser la base de una publicación autónoma dedicada a la Enseñanza de la Geometría en Iberoamerica.

Introducción general

La geometría aparece muy temprano en la civilización humana. Hace unos 4.000 años, podemos ver que la educación en las escuelas de escribas del período de la antigua Babilonia “iba de la mano de la actividad creativa” (Proust, 2014). Muchos investigadores han estudiado las escuelas escribanas y está claro que la Geometría estuvo presente desde el principio. Como lo expresa Friberg (2014): “dividir ciertas parcelas de tierra en parcelas de acuerdo con algún complejo conjunto de reglas, o dividir ciertas cantidades de alimentos en raciones de varios tamaños de acuerdo con algún otro complejo conjunto de reglas, debe haber sido una parte importante del proceso”. Por supuesto, se estudiaron juntas Geometría, Aritmética y Álgebra. Los diagramas geométricos eran comunes en las tablillas de arcilla.

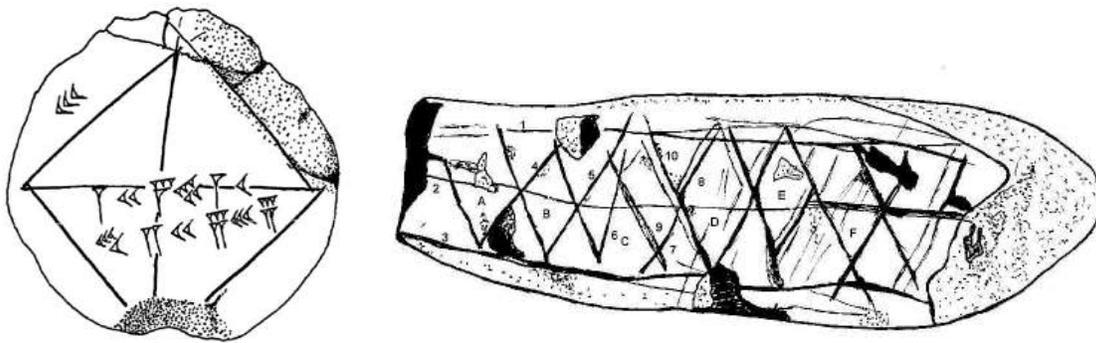


Figura: Tablilla de arcilla con problema geométrico babilónico, ocre con figuras geométricas encontrada en la cueva de Blombos

El descubrimiento de un fragmento ocre con un patrón geométrico inscrito en la cueva de Blombos, Sudáfrica, con una antigüedad de 77.000 años, es el testimonio más antiguo de la actividad matemática geométrica realizada por el hombre. Su carácter muestra la aprehensión de conceptos geométricos elementales como paralelismo, equidistancia, ángulo y también formas geométricas (rectángulos, paralelogramos) (Almeida, 2009).

El arte, como muy bien observa D' Ambrosio (2002), aparece naturalmente mezclado con las Matemáticas en las primeras etapas de la historia humana.

Todas las civilizaciones desarrollaron tanto conocimientos generales como tradiciones propias, apareciendo la llamada Geometría Sagrada en muchos contextos, como es el caso de la civilización maya (Dimantopoulos, Huffman, 2013).

En el caso de Perú, se ha encontrado en Huaral una *Chakana* (cruz cuadrada andina) que tiene una antigüedad de 4.000 años, lo que demuestra que desde hace miles de años los antiguos peruanos desarrollaron un pensamiento geométrico como ha sido estudiado desde la arqueoastronomía y la astrofísica (Rojas Gamarra, 2019a, 2019b). Por otro lado, por estudios etnográficos se ha encontrado evidencia científica que demuestra que en los saberes ancestrales presentes en las actividades económicas, subyacen prácticas matemáticas relacionadas a la Geometría (Bonilla-Tumialán, 2023).

La enseñanza de la Geometría en el espacio iberoamericano



Figura 2: La Chakana más grande de Sudamérica en templo de 4000 años en Huaral - Perú (UNMSM, 2023)

¿En qué medida contribuirá el uso de contactos históricos pasados a mejorar la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría?

Enseñar y aprender la geometría ha sido un hecho desde hace milenios. Arquímedes, en su Método, le dice a Eratóstenes cómo investigar problemas de Geometría con la Mecánica y luego probar los resultados obtenidos usando la Geometría y dijo que la parte investigativa también es útil para probar estos resultados (Heath, 1912). Las herramientas, alcance e interacción con otras áreas han cambiado mucho en el presente siglo. Según lo declarado por Gila Hanna y Xiaoheng Yan (2021), “se necesitan nuevos enfoques para las pruebas de enseñanza, que aprovechen no solo las nuevas tecnologías disponibles, sino también las teorías modernas de la enseñanza y el aprendizaje”.

Ciertamente necesitamos reflexionar intensamente sobre formas nuevas y significativas de enseñar Geometría en la Educación Básica y Secundaria, que utilicen la tecnología de una manera inteligente y significativa (ICMI, 2023).

Miguel de Guzmán, en su libro “La experiencia de descubrir en Geometría” escribió que “(...) me resulta del todo verosímil que en un futuro bastante próximo la experimentación será mucho más fácil de realizar que ahora, la conjetura y su comprobación o refutación se hará mucho más sencilla y sin esfuerzo, y la demostración automática será directa (...) ayudados en todas sus fases por el ordenador (...)”

¿Qué sugerencias podemos ofrecer hoy a los investigadores en educación matemática, a los docentes y a los tomadores de decisiones políticas en el espacio iberoamericano para la enseñanza de la Geometría?

Referencias

- Almeida, MC (2009). *Orígenes de las matemáticas: la prehistoria de las matemáticas. Vol. I – Matemáticas Paleolíticas*. Curitiba: Progresiva, 2009. 306p. Prefacio de Ubiratan D' Ambrosio.
- Almeida, MC (2011). *Orígenes de las matemáticas: la prehistoria de las matemáticas. Vol. II – El Neolítico y los albores de la Historia*. Curitiba: Progresiva, 2011. 365 p. Prefacio de Ubiratan D' Ambrosio.
- Bonilla-Tumialán, M. C. (2023). Ethnomathematics and Complexity: A Study of the Process of Elaboration of a Peruvian Andean Textile. En M. Borba & D. Orey. (Eds.). *Ubiratan D'Ambrosio and Mathematics Education* (pp. 179 - 200). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-31293-9_13

La enseñanza de la Geometría en el espacio iberoamericano

- Carvalho y Silva, J. (2024). Enseñanza de geometría desde Babilonia hasta la era de las computadoras, en Lowrie, T., Gutiérrez, A. y Emprin, F. (Eds.), *Actas de la 26ª Conferencia de estudio del ICMI (Avances en la educación geométrica)* (págs. 159-166). ICMI.
- D'AMBROSIO, Ubiratan (2002). *Etnomatemática – Vínculo entre tradiciones y modernidad*. Belo Horizonte: Auténtica, 2002. 110p.
- Diamantopoulos, JCD, Huffman, CJ (2013). "Geometría maya en el aula: cómo hacer un ángulo recto al estilo maya", *Convergence* (agosto de 2013), DOI:10.4169/convergence20130801
- Friberg, J. (2014). Problemas de división geométrica, ecuaciones cuadráticas y algoritmos geométricos recursivos en las matemáticas mesopotámicas. *Arch. Hist. Exact Sci.* 68:1–34.
- Guzmán, M. de (2002). *La experiencia de descubrir en Geometria*, Tres Cantos: Nivola.
- Hanna, Gila y Yan, Xiaoheng (2021). Apertura de un debate sobre la enseñanza de la demostración con demostradores de teoremas automatizados, *For the Learning of Mathematics* 41(3), 42-46 (noviembre de 2021) FLM Publishing Association, New Westminster, BC, Canadá (preimpresión).
- Heath, TL (1912). *El método de Arquímedes*, Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- ICMI (2023). El 26.º estudio del ICMI: avances en la enseñanza de la geometría. Anuncio del documento de debate. *Enseign. Math.* (2) (Primera versión en línea) DOI 10.4171/LEM/1069
- Proust, C. (2014). ¿Un maestro siempre escribe para sus alumnos? Algunas evidencias de las antiguas escuelas de escribas babilónicas. *Fuentes científicas y contextos de enseñanza a lo largo de la historia: problemas y perspectivas*, Springer, pág. 69-94.
- Rojas Gamarra, M. & Zen Vasconcellos, C. A. (2019a). The constellations and spacetime concept according to the Inkas. *Astronomische Nachrichten*, 340(1-3), 18-22
Astronomische Nachrichten 340(1-3):18-22. doi:10.1002/asna.201913552
- Rojas Gamarra, M., Gullberg, S. R., Estrázulas, M., Horvath, J. & Zen Vasconcellos, C. A. (2019b). Complementary duality of the Inca's cosmovision: An astrophysics perspectiv. *Astronomische Nachrichten*, 340(9-10), 817-827. Doi: 10.1002/asna.201913718
- Universidad Nacional Mayor de San Marcos. (2023, 22 de mayo). La Chakana más grande de Sudamérica en templo de 4000 años en Hualal [Video]. Youtube.
https://www.youtube.com/watch?v=j8fvjgcBaAQ&ab_channel=RTVSanMarcos-UNMSM

La enseñanza de la Geometría en México

Innovación y desafíos: de la manipulación al entorno digital y la inteligencia artificial

Rubén Alejandro Águeda Altúzar

altuzartutor@gmail.com

La enseñanza de la Geometría en la educación secundaria mexicana ha transitado por diferentes enfoques que reflejan las transformaciones del sistema educativo nacional y los avances de la Didáctica de las Matemáticas. Tradicionalmente centrada en la memorización y la aplicación mecánica de propiedades, la Geometría escolar ha buscado, desde hace algunas décadas, desarrollar el razonamiento visual, la argumentación y la demostración. Este texto analiza la evolución de su enseñanza, con énfasis en los retos actuales y las innovaciones didácticas recientes, incluyendo el uso de la Geometría Dinámica mediante GeoGebra y las primeras experiencias con inteligencia artificial en el contexto mexicano.

1. Evolución curricular y enfoques tradicionales

Desde la reforma de 1925 que instituyó la educación secundaria en México, la Geometría fue una de las disciplinas fundamentales. Hasta mediados del siglo XX, el enfoque fue marcadamente formalista, con una orientación deductiva y centrada en definiciones, axiomas y teoremas. Según Texta Mongoy (2015), esta tradición euclidiana estaba ligada a un modelo de enseñanza que privilegiaba la repetición y la comprobación mecánica de propiedades, con escasa atención a la exploración o a la argumentación del estudiante.

Posteriormente, con la modernización matemática de los años 70, se introdujo la Teoría de Conjuntos y se reforzó la estructura lógica del conocimiento geométrico. La reforma de 1993, influida por la didáctica francesa, incorporó un enfoque basado en la resolución de problemas y la transición entre niveles de razonamiento geométrico, en particular los de la teoría de Van Hiele (Huerta, 1999). Este periodo representó un esfuerzo por integrar el conocimiento geométrico escolar con nuevas concepciones del aprendizaje y con una visión más funcional de las Matemáticas escolares.

A partir de 2006, con el enfoque por competencias, se intentó privilegiar el aprendizaje significativo y la aplicación contextualizada de los conceptos geométricos. Esta reforma incorporó la idea de que los estudiantes deben desarrollar habilidades para resolver problemas, comunicar sus ideas y utilizar diversas representaciones. Sin embargo, en la práctica, persisten dificultades como el dominio limitado de los docentes sobre los fundamentos de la Geometría, la escasez de materiales didácticos efectivos y la ausencia de evaluaciones centradas en la argumentación geométrica.

Recientemente, con la implementación de la Nueva Escuela Mexicana (NEM), se propone una visión educativa centrada en la inclusión, la equidad y la formación integral del estudiante. En este modelo, la Geometría debe abordarse como una herramienta para comprender el entorno, desarrollar el pensamiento crítico y fomentar la conciencia espacial. Aunque los programas oficiales enfatizan la importancia de trabajar con situaciones contextualizadas y promueven el uso de tecnologías digitales, aún falta consolidar una propuesta didáctica específica para la Geometría que articule estos principios con estrategias concretas de enseñanza.

La enseñanza de la Geometría en el espacio iberoamericano

Desde una perspectiva histórica, es posible identificar tres grandes momentos en la Enseñanza de la Geometría en México: (1) el enfoque axiomático-formal (1925-1970), (2) la etapa de modernización y transición a la resolución de problemas (1970-2005), y (3) el enfoque por competencias, seguido por el modelo de la Nueva Escuela Mexicana (2006 a la fecha). Cada uno de estos momentos ha estado influido por corrientes pedagógicas internacionales y por las condiciones sociopolíticas del país, lo que ha generado tensiones entre las intenciones curriculares y la práctica docente cotidiana. En este sentido, Riera (2003) sitúa el caso mexicano dentro de una problemática más amplia en la Enseñanza de la Geometría en Iberoamérica, caracterizada por la ruptura entre la Geometría escolar y la Geometría como disciplina matemática viva.

2. Geometría Dinámica y el uso de GeoGebra

Una de las innovaciones más significativas en la enseñanza de la Geometría ha sido la incorporación de herramientas de Geometría Dinámica, especialmente GeoGebra. Esta plataforma permite la construcción interactiva de figuras, la manipulación de objetos y la exploración de propiedades geométricas de manera visual y experimental.

Diversas experiencias en instituciones mexicanas han mostrado el potencial de GeoGebra para mejorar la comprensión de conceptos como las funciones, las cónicas y los poliedros. Por ejemplo, Bahena Salgado et al. (2023) documentan la mejora en la visualización de funciones en estudiantes de cálculo diferencial mediante actividades con GeoGebra. Montesinos Pérez (2023) reporta una secuencia didáctica sobre las cónicas que facilitó tanto el aprendizaje visual como el algebraico. Otros trabajos, como los de Rubio-Pizzorno y Montiel-Espinosa (2021), integran ambientes híbridos que combinan material concreto con manipulación virtual, fortaleciendo la construcción de significado en la formación docente.

Estas propuestas han sido enriquecidas por estudios sobre los niveles Van Hiele, como los de Collazos Delgado et al. (2023), que muestran que las secuencias mediadas por GeoGebra ayudan a los estudiantes de primaria y secundaria a avanzar en sus niveles de razonamiento geométrico.

3. Inteligencia artificial y nuevas perspectivas

La incorporación de la inteligencia artificial (IA) en la enseñanza de la geometría es una línea emergente de investigación. En México, se ha iniciado una serie de proyectos que exploran el uso de IA para apoyar la enseñanza y el aprendizaje de la geometría mediante el análisis de las acciones del estudiante dentro de ambientes como GeoGebra.

Estos proyectos buscan diseñar sistemas que recomienden construcciones geométricas personalizadas, analicen trayectorias de aprendizaje, detecten patrones en el uso del arrastre y generen retroalimentación automatizada. Aunque muchos de estos desarrollos están en fase piloto, ya se han presentado avances significativos en congresos especializados, que apuntan a la posibilidad de integrar estas tecnologías en entornos reales de enseñanza.

4. Conclusiones y recomendaciones

La Enseñanza de la Geometría en México se encuentra en un momento clave de transición. Mientras persisten retos estructurales vinculados a la formación docente y al acceso equitativo a recursos, también emergen oportunidades a partir de la integración de tecnologías digitales y sistemas inteligentes.

Recomendaciones

- Consolidar la presencia de herramientas como GeoGebra en la práctica escolar.

La enseñanza de la Geometría en el espacio iberoamericano

- Fortalecer la formación docente en tecnologías y Didáctica de la Geometría.
- Apoyar el desarrollo de sistemas de IA educativa desde una perspectiva ética y pedagógica.
- Fomentar la investigación colaborativa entre universidades, centros de formación y escuelas.

Referencias

Bahena Salgado, A. et al. (2023). *La geometría dinámica en el aprendizaje del comportamiento de funciones por medio de la visualización*. Revista MICAyCA.

Collazos Delgado, A. A., González Rincón, Y. M., & María Nelva Monroy Fonseca, M. N. M. F. (2023). Desarrollo del pensamiento geométrico a través de una secuencia didáctica apoyada con el uso de la herramienta GeoGebra. *Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar*, 7(1), 3433-3459. https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v7i1.4664.

Huerta Palau, M. (1999). *Los niveles de Van Hiele en relación con la taxonomía SOLO y los mapas conceptuales*. Universidad de Valencia.

Montesinos Pérez, J. L. (2023). *Efecto de la introducción del uso de software de geometría dinámica (GeoGebra) en el diseño y aplicación de una secuencia didáctica para la enseñanza y aprendizaje de las cónicas*. Cinvestav.

Riera, L. (2003). *Panorama internacional de la enseñanza de la geometría*. Instituto de Matemáticas, IMCH. https://imch.org.mx/03_archivos/IMCHLuisRPanorInt.pdf

Rubio-Pizzorno, S. & Montiel-Espinosa, G. (2021). *Prácticas digitales en la construcción de conocimiento geométrico*. Cinvestav. <https://www.cinvestav.mx/zacatenco/investigacion/proyectos/pr225cticas-digitales-en-la-construcci243n-de-conocimiento-geom233trico>

Texta Mongoy, Oliver (2015). *La enseñanza de la geometría en la escuela secundaria mexicana*. *Ciencias*, núm. 115-116, enero-junio, pp. 56-65. [En línea] <https://www.revistacienciasunam.com/es/199-revistas/revista-ciencias-115-116/1915-la-ensenanza-de-la-geometria-en-la-escuela-secundaria-mexicana.html>

La enseñanza de la Geometría en España

Julio Rodríguez Taboada

Antecedentes históricos

Tradicionalmente la geometría no ha sido una de las ramas mejor tratada por la educación matemática española. Las distintas leyes educativas promulgadas a lo largo de los últimos 50 años, seis en total, contemplaban en la distribución de los contenidos a tratar, los bloques de contenido clásicos, esto es, aritmética, álgebra, análisis, geometría, estadística y cálculo de probabilidades.

Sin embargo, la realidad de las aulas nos muestra una situación en la que la educación matemática se centra en los bloques de aritmética y álgebra, llegando a trabajar contenidos propios del análisis en los cursos superiores. La enseñanza es relegada, dedicándose a la misma una parte mínima de las sesiones de clase en la mayoría de los niveles educativos. Este escaso protagonismo de la geometría en las aulas se percibe también en el tipo de contenidos y tareas que se proponen: memorización de elementos y propiedades de diferentes figuras, memorización de clasificaciones dadas, empleo directo de fórmulas para calcular distintas medidas de las figuras planas y tridimensionales, etc.

Esta falta de trabajo de resolución de problemas, razonamiento y conexión entre los diferentes bloques de contenido fue puesta de manifiesto en su análisis por el grupo de trabajo de la FESPM encargado de realizar el análisis del currículo de Matemáticas de Educación Primaria de la LOMCE (https://www.fespm.es/IMG/pdf/Conclusiones_GT_Primeria_FESPM.pdf). Esta ley estuvo en vigor desde 2014 hasta 2022.

Situación actual

La educación matemática en España se encuentra en una fase de cambio profundo, derivado de la publicación en el año 2021 de una nueva ley educativa, la LOMLOLE. Esta norma, que entró en vigor plenamente en el curso 2023 - 2024 propone un desarrollo curricular de las áreas de matemáticas centrado en los procesos matemáticos de resolución de problemas, razonamiento y prueba, conexiones, comunicación y representación. A pesar de que los procesos matemáticos estaban presentes en las normas anteriores, esta es la primera vez en la que los objetivos de aprendizaje de las distintas etapas y los criterios de evaluación asociados no se describen en términos de contenidos, sino de procesos.

Esta modificación del enfoque de la educación matemática tiene su punto de partida en una propuesta del Comité Español de Matemáticas (entidad que agrupa a la mayoría de instituciones españolas del ámbito de la matemática, tanto a nivel de educación como de investigación), recogida en el documento “Bases para la elaboración de un currículum de Matemáticas en enseñanza no universitaria”, publicado en mayo de 2021 (<https://www.ce-mat.org/wp-content/uploads/2024/06/bases2021.pdf>). En este documento se propone una educación matemática que parte de la idea de sentido matemático, entendido como “como el conjunto de capacidades relacionadas con el dominio en contexto de contenidos numéricos y algebraicos, geométricos, métricos y estocásticos, que permiten emplear estos contenidos de una manera funcional y con confianza en las propias habilidades” (Ruiz-Hidalgo et al., 2019).

El documento del CEMat incluye indicaciones específicas sobre aspectos a los que prestar más atención en cada una de las etapas, en detrimento de otros que deberían evitarse o tratarse en menor medida. En relación a la enseñanza de la geometría, que podríamos relacionar más directamente con el sentido espacial y con el sentido de la medida, se propone atender más a, entre otros, los siguientes aspectos:

La enseñanza de la Geometría en el espacio iberoamericano

En Educación Infantil y Primaria

- Analizar atributos compartidos por un conjunto de objetos, describirlos, representarlos en diferentes formatos (papel, materiales manipulativos, materiales virtuales) y, en su caso, ponerles un nombre que los aglutine.
- Incidir en aspectos del pensamiento geométrico, como el estudio de las figuras y sus propiedades (problemas de ángulos y de geometría deductiva en general), haciendo más hincapié en el reconocimiento de figuras y en la identificación de las propiedades más elementales.
- Introducir programas de geometría dinámica en sus versiones más simplificadas, con las prestaciones propias para desarrollar los contenidos de esta etapa, sin perder de vista la idea que la manipulación siempre debe ser un estado previo al uso del material virtual que supone un grado más de abstracción.
- Desarrollar estrategias para estimar perímetros, áreas y volúmenes de figuras irregulares.
- Comprender la necesidad de medir con unidades estándar y familiarizarse con ellas.

En Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato

- Utilizar programas de geometría dinámica para trabajar la geometría, relacionar la geometría con álgebra y funciones y resolver problemas.
- Trabajar el reconocimiento o visualización de las características del espacio y la forma, manipulación física o mediante el uso de programas de geometría que permitan analizar las características del espacio, la forma y el cambio en el movimiento de las figuras, el razonamiento, argumentación y demostraciones lógicas y formales al justificar las proposiciones planteadas.
- Destacar la construcción de modelos del mundo real y desarrollar técnicas de resolución de problemas.
- Establecer conexiones entre la forma de abordar los problemas geométricos que estudian el fenómeno del espacio y la forma, desde la geometría euclidiana sintética y desde la geometría analítica.

Estas directrices fueron asumidas por el Ministerio de Educación en los desarrollos curriculares de las materias de matemáticas derivados de la LOMLOE, circunstancia que fue celebrada por las entidades adheridas al CEMat. Sin embargo, tal y como demuestran las propuestas de los libros de texto más utilizados en las aulas españolas, este cambio de enfoque no está llegando aún a la realidad de las clases, en las que se mantienen las actividades tradicionales de reproducción, memorización y aplicación directa de fórmulas.

La normativa curricular española no incluye orientaciones sobre aspectos metodológicos ni sobre recursos o materiales a emplear en la enseñanza de la geometría. Sin embargo, algunas comunidades autónomas sí han añadido recomendaciones en este sentido, destacando por su utilidad y su alineamiento con esta nueva perspectiva la propuesta de Aragón. Esta propuesta ha sido alabada y destacada como ejemplo por las sociedades de profesorado de Matemáticas y numerosos docentes de Primaria y Secundaria.

La realidad actual de la enseñanza de la Geometría en España nos muestra un cambio lento hacia una visión más centrada en procesos de resolución de problemas, desarrollo de la visualización y el razonamiento espacial, la conexión con elementos de la realidad del alumnado y el trabajo de procesos deductivos. Este cambio requiere de un importante esfuerzo de información, formación y actualización didáctica del profesorado, en el que están trabajando las distintas administraciones educativas en colaboración con las sociedades de profesorado.

La enseñanza de la Geometría en el espacio iberoamericano

Referencias

RUIZ-HIDALGO, J. F.; FLORES M., P.; RAMÍREZ-UCLÉS, R. y FERNÁNDEZ-PLAZA, J. A. (2019). Tareas que desarrollan el sentido matemático en la formación inicial de profesores. Educación matemática, vol.31, n.1, pp.121-143.

COMITÉ ESPAÑOL DE MATEMÁTICAS (2021). Bases para la elaboración de un currículo de Matemáticas en Educación no Universitaria. Comité Español de Matemáticas.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y FORMACIÓN PROFESIONAL (2022). Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. Boletín Oficial del Estado, (52), 29117-29210.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y FORMACIÓN PROFESIONAL (2022). Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. Boletín Oficial del Estado, (76), 42168-42288.

DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN, CULTURA Y DEPORTE DEL GOBIERNO DE ARAGÓN (2022). Orden ECD/1112/2022, de 18 de julio, por la que se aprueban el currículo y las características de la evaluación de la Educación Primaria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón.

DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN, CULTURA Y DEPORTE DEL GOBIERNO DE ARAGÓN (2022). Orden ECD/1172/2022, de 2 de agosto, por la que se aprueban el currículo y las características de la evaluación de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón.

La Enseñanza de la Geometría desde la Cosmovisión Andina de Perú

María del Carmen Bonilla-Tumialan, Pontificia Universidad Católica del Perú

mbonilla@pucp.edu.pe

Resumen: El trabajo aporta a la solución de la problemática educativa de los estudiantes de Educación Intercultural Bilingüe de Puno, Perú, que presentan dificultades en la comprensión de las nociones matemáticas. La idea es partir de la investigación de los saberes matemáticos ancestrales que subyacen en las prácticas culturales para incorporarlos en los procesos de aprendizaje de los estudiantes en el área de matemática. Todo ello aporta al reconocimiento y revalorización de los saberes ancestrales desarrollados por la cultura Quechua-Collao presentes en la elaboración del tejido en telar de cuatro estacas. En la metodología se aplicó la etnografía.

Palabras claves: Geometría Inca, Geometría Dinámica, Etnomatemática. Enseñanza. Textiles

Introducción

Evidencias arqueológicas demuestran que las culturas preincas e incas desarrolladas en el territorio peruano, en su cosmovisión, han cultivado el pensamiento geométrico hace milenios (Rojas Gamarra, 2019b). En Huaral, Lima, el 2023 se ha encontrado una Chakana (cruz cuadrada andina) que tiene una antigüedad de 4.000 años como se aprecia en la Figura 1a (UNMSM, 2023). Chakana es una palabra quechua que viene de chaka que significa puente. La Chakana representa los principios fundamentales que rigen el equilibrio del universo andino y simboliza la conexión entre los tres mundos: el subterráneo o ukhu pacha, el terrenal o kay pacha y el celestial o hanan pacha. Pacha es un concepto que unifica espacio y tiempo, no como entidades separadas, sino como una sola realidad interconectada, desde una visión dinámica y cíclica, desde una perspectiva holística y espiritual donde existe una interdependencia de los elementos del universo (Rojas Gamarra, 2019a).

Tanto en las edificaciones antiguas prehispánicas, por ejemplo, Machu Picchu en Cusco, como en los tejidos encontrados en los sitios arqueológicos de la costa peruana, se puede apreciar que los antiguos peruanos emplearon conceptos geométricos en sus productos culturales. Pero, los textiles no sólo habrían tenido funciones de abrigo y estética, Por estudios se sabe que en los textiles y en sus diseños geométricos se puede descifrar un sistema de escritura – Tocapu - como se aprecia en la Figura 1c (Silverman, 2023). Sería un sistema de escritura inca distinto a los Quipus (Figura 1b), artefactos elaborados también con lanas y cuerdas que todavía no han sido descifrados (Bonilla-Tumialan, 2023). Es decir, los conocimientos ancestrales de los antiguos peruanos, destruidos sistemáticamente desde la invasión española, todavía resisten contra el epistemicidio y están siendo estudiados.



Figura 1. a. Chakana. b. Quipu. c. Tocapu. d. Diseño textil con Cabri II Plus. Fuentes: a. (UNMSM, 2023), b. (National Geographic, 2023), c. (Silverman, 2023), d. (UPCH, 2014).

La enseñanza de la Geometría en el espacio iberoamericano

La Etnomatemática es un programa de investigación lakatosiano (D'Ambrosio, 1993) que propone un enfoque epistemológico que parte de la realidad y tiene un carácter histórico, cultural, social, político, cognitivo y pedagógico. El objetivo fundamental de la Etnomatemática es la consolidación del paradigma relativista en matemáticas basado en una epistemología cultural, que explica los conocimientos matemáticos teniendo en cuenta la contextualización en el grupo sociocultural de los sujetos productores (Bonilla-Tumialan, 2019).

Desde la Etnomatemática, lograr que los estudiantes indígenas quechuas, shipibos y aimaras del curso “Matemática y Etnomatemática” del primer año de nivelación de la Carrera de Educación Intercultural Bilingüe de la Facultad de Educación de la Universidad Peruana Cayetano Heredia, comprendan y empleen los elementos y conceptos fundamentales de la geometría es un problema que había que abordar desde su cosmovisión y su práctica cultural. En ese sentido, se planteó como pregunta de investigación, ¿Cómo reproducir sus diseños culturales relacionándolos con las propiedades de los elementos fundamentales de la geometría? Con ese fin se empleó la Geometría Dinámica del software Cabri II Plus como medio didáctico a través del cual los estudiantes de EIB utilizaron elementos y conceptos de la Geometría para dibujar sus diseños, como se aprecia en la Figura 1d y en un [repositorio fotográfico](#) (Bonilla, 2015; UPCH, 2014).

Prontamente, los estudiantes aprendieron a utilizar los comandos del Cabri II Plus, logrando reproducir diseños complejos y bellos de sus culturas empleando elementos de la geometría y realizando transformaciones geométricas. En esa práctica, por la habilidad y destreza con que manejaban las herramientas digitales, surgió la idea de que los estudiantes ya poseían conocimientos matemáticos previos que habrían sido transmitidos por sus familiares y que eran utilizados en las actividades prácticas de sus comunidades. En ese momento surge la idea de realizar una investigación cualitativa con un diseño etnográfico en las comunidades indígenas de los estudiantes con la finalidad de identificar conocimientos matemáticos que subyacen en sus prácticas diarias.

El 2015 el proyecto antes mencionado fue ganador de un concurso del Consorcio de Universidades del Perú, el Premio a la Investigación Interuniversitaria y Multidisciplinar 2015, que permitió el financiamiento del proyecto y el trabajo de campo en las regiones de Puno y Ucayali de Perú. Se deseaba identificar conocimientos matemáticos empleados en las actividades diarias de las comunidades para articularlos con las nociones y propiedades matemáticas contemplados en el currículo nacional y que se deseaba que los estudiantes aprendieran.

Los resultados obtenidos en el proyecto fueron publicados en la tesis de Maestría que obtuvo el Premio Simón Bolívar 2021 a la mejor tesis de Maestría por el Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Se puso en evidencia que, al momento de construir la base del telar andino de cuatro estacas, las tejedoras de Puno emplean técnicas similares a la técnica matemática empleada en la construcción de un rectángulo (Bonilla-Tumialan, 2019, 2023, 2025a).

El 2024, en una institución educativa (IE) de Puno, se aplicó una propuesta didáctica sobre el rectángulo y sus propiedades. Se inició con la participación de una tejedora en el campo de la IE plantando las cuatro estacas de la base de su telar, proceso que fue observado por los estudiantes. En el Laboratorio de Informática de la IE se reprodujo el vídeo del proceso de construcción de la base del telar para que fuera analizado y comprendido por los estudiantes. Lo que se deseaba era que los estudiantes, posteriormente, reproduzcan el proceso de construcción de la base del telar de manera digital, empleando objetos y propiedades matemáticas que están presentes en las herramientas del Geogebra. De una manera experimental se pudo observar que en el tejido andino peruano emergen conceptos matemáticos que pertenecen a los cuerpos de conocimientos de la cultura Quechua-Collao.

La enseñanza de la Geometría en el espacio iberoamericano

La propuesta didáctica fue presentada al concurso científico que cada año convoca *Ciencia en Acción* en la comunidad educativa de Iberoamérica. *Ciencia en Acción* es una actividad de la Red Innpulso que cuenta con la colaboración del Instituto de Ciencias Matemáticas, la Real Sociedad Matemática Española, entre otras instituciones científicas. Se participó en el Concurso Miguel Muñoz Lecanda, Laboratorio de Matemáticas ICMAT y la propuesta se hizo acreedora a una Mención Honrosa (Bonilla-Tumialan, 2025b).

Unos de los logros más importantes se ubican en el campo afectivo y emocional. Para los estudiantes indígenas, para sus familiares y comunidades involucradas en las diversas etapas de la investigación, que sus trabajos sean expuestos y hayan sido merecedores de premios y reconocimientos, reafirma su identidad, revaloriza su cultura, digna de ser investigada y difundida. La aprobación que ha recibido su cultura eleva su autoestima, inyectándoles entusiasmo para desarrollar nuevos proyectos académicos. Han podido ser conscientes de la potencialidad que poseen. Esos logros no tienen precio.

Fuentes bibliográficas

- Baulenas, A. (2023, 10 de noviembre). *Quipus, el código secreto de nudos de los Incas*. Historia. National Geographic. <https://bit.ly/4elhXUt>
- Bonilla-Tumialan M. C. (2015). Etnomatemática y geometría dinámica. Patrick, R. y Ruíz, A. (Eds.). *Educación Matemática en las Américas. Talleres y minicursos, 17*, 169-176. República Dominicana: Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM). <https://bit.ly/3G8WzFs>
- Bonilla-Tumialan, M. C. (2019). *Un estudio del proceso de elaboración del tejido quechua en telar de cuatro estacas. Aportes para la enseñanza de las matemáticas en la educación básica*. [Tesis de Maestría en Enseñanza de las Matemáticas, Pontificia Universidad Católica del Perú]. Repositorio PUCP. <https://bit.ly/4k9IxRE>
- Bonilla-Tumialan, M. C. (2023). Ethnomathematics and Complexity: A Study of the Process of Elaboration of a Peruvian Andean Textile. En M. Borba & D. Orey. (Eds.). *Ubiratan D'Ambrosio and Mathematics Education* (pp. 179 - 200). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-31293-9_13
- Bonilla-Tumialan, M. C. (2025a, 25 de junio). *Tres formas de construir la base del telar de cuatro estacas en la provincia de Melgar, Puno, Perú* [Video]. YouTube. <https://youtu.be/ooeHa3GI9hY>
- Bonilla-Tumialan, M C. (2025b, 25 de junio). *Construcción de un rectángulo en Geogebra a partir de la elaboración de la base del telar andino peruano* [Video]. YouTube. <https://youtu.be/i8Ypzk931Ug>
- D'Ambrosio, U. (1993). Etnomatemática: Um programa. *Educação Matemática em Revista*, 1(1), 5- 11.
- Rojas Gamarra, M. & Zen Vasconcellos, C. A. (2019a). The constellations and spacetime concept according to the Inkas. *Astronomische Nachrichten*, 340(1-3), 18-22. Doi:10.1002/asna.201913552.
- Rojas Gamarra, M., Gullberg, S. R., Estrázulas, M., Horvath, J. & Zen Vasconcellos, C. A. (2019b). Complementary duality of the Inca's cosmovision: An astrophysics perspective. *Astronomische Nachrichten*, 340(9-10), 817-827. Doi: 10.1002/asna.201913718.
- Silverman, G. (2023). *Quillca. La escritura de los Incas*. Juan Gutemberg Editores Impresores EIRL. Universidad Nacional Mayor de San Marcos. (2023, 22 de mayo). *La Chakana más grande de Sudamérica en templo de 4000 años en Huaral* [Video]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=j8fvjgcBaAQ&ab_channel=RTVSanMarcos-UNMSM.
- Universidad Peruana Cayetano Heredia. Facultad de Educación. (2014). *Etnomatemática y Geometría Dinámica*. <https://bit.ly/46brF9W>

Novas propostas para o ensino da Geometria

Cristina Loureiro

Contexto e Abordagem instrumental

O ensino da geometria é hoje em dia realizado num contexto sócio educativo, científico e tecnológico de grande exigência e de enormes possibilidades. De grande exigência porque está bem claro para todos os que trabalham em educação o difícil papel da escola no desenvolvimento das crianças e dos jovens numa sociedade em mudança acelerada. Sabe-se cada vez mais sobre aprendizagem e é dominante o reconhecimento de que não interessa ter um currículo de geometria que não possa ser aprendido.

Projetar um currículo de geometria adequado é provavelmente a tarefa mais difícil para aqueles que estão encarregues de construir currículos de matemática. É também provavelmente o dilema mais duradouro na elaboração de currículos de matemática e provavelmente tem sido objeto de mais questionamentos e comentários do que qualquer outra área do currículo de matemática. (Jones, 2000, p. 75)

As novas possibilidades para o ensino da geometria advêm das condições tecnológicas atuais e existe um amplo reconhecimento pela investigação de que “a utilização da tecnologia no ensino da geometria se tornou relativamente comum, embora ainda não exista investigação suficiente sobre os seus efeitos específicos” (Sinclair et. al, 2017, p. 281). Ao mesmo tempo que o papel da tecnologia começa a ser compreendido, esta evolui e rapidamente provoca mudanças na vida de todos os dias e na sala de aula, existindo por isso um forte sentido de esperança sobre o crescimento do interesse dos professores e da investigação pelo ensino e aprendizagem da geometria — “de tópico subvalorizado devido a uma maior ênfase nos números e na álgebra” (Sinclair et. al, 2017, p. 284) — a geometria poderá ganhar relevância e protagonismo.

Os ambientes de geometria dinâmica vieram alterar radicalmente as condições em que é possível ensinar e aprender geometria. As novas ferramentas de mediação proporcionadas por estes ambientes oferecem novas possibilidades para operar com os objetos geométricos e alteram os próprios objetos geométricos. Assim, “o desenho de situações de aprendizagem num contexto de geometria dinâmica exige uma nova análise dos objetos, das operações e do feedback didático envolvido na situação” (Laborde, 1998, p. 113). Este conhecimento tem dado mais força ao sentido instrumental da aprendizagem em geometria — “Um instrumento não existe só por si, ele torna-se um instrumento quando o sujeito já foi capaz de se apropriar dele e o passa a integrar na sua atividade” (Laborde et al, 2006, p. 276).

A abordagem instrumental, considerada como fundamental para a compreensão da aprendizagem da matemática em geral e, em particular da geometria, está intimamente ligada com a utilização de dois tipos de artefatos mediadores, físicos e digitais, de forma que a interação entre eles é assumida como uma condição fundamental para perspectivar o currículo de geometria, reforçando cada vez mais a ideia, que já vem sendo defendida há algum tempo, de que a integração de ferramentas digitais no ensino influencia a geometria que pode ser aprendida (Jones, 2000; Nemirovsky & Sinclair, 2020; Fujita et al, 2025). Assiste-se hoje ao grande desenvolvimento e crescimento da diversidade das ferramentas digitais que ampliam as oportunidades de unir pensamento e ação, numa perspectiva de esforço conjunto para associar os artefatos pedagógicos físicos e digitais (Sinclair et al, 2024). Este contexto abre novas possibilidades e desafios à abordagem instrumental do ensino e da aprendizagem da geometria (Laborde, 2006; Fujita et al, 2025).

La enseñanza de la Geometría en el espacio iberoamericano

Processos cognitivos e Objetivos

O ensino da geometria ao longo de toda a escolaridade deve ser encarado sob perspectivas múltiplas que combinem tanto as várias dimensões e modos de encarar a própria geometria como a diversidade de possibilidades da sua abordagem e das atividades a realizar (Neubrand, 1998, 2024).

As razões para esta consciencialização da multiperspectividade do ensino da geometria residem em visões evolutivas sobre a matemática em si (do simples formalismo para uma visão mais ampla da matemática como uma atividade humana) e sobre o ensino e a aprendizagem da matemática (para uma maior ênfase nos papéis ativos dos alunos). Por conseguinte, as discussões recentes sobre o desenvolvimento futuro dos currículos em geometria centram-se em questões como: promover a aprendizagem ativa através de métodos de trabalho em grupo ou de ensino e aprendizagem orientados para projetos; superar as separações tradicionais das diferentes disciplinas escolares integrando e interpretando tópicos geométricos em contextos das ciências naturais, técnicas e sociais. (Neubrand, 1998, pp. 259)

A geometria **envolve três tipos de processos cognitivos**: Visualização, Construção e Raciocínio. Estes três tipos de processos cognitivos cumprem funções epistemológicas distintas e devem ser encarados e perspectivados tanto separadamente como em ligação (Duval, 1998, p.38). A proficiência em geometria está ligada à sinergia que pode ser estabelecida entre estes processos. Do ponto de vista da aprendizagem, tanto ao nível da escolaridade básica como da secundária, há que encarar como estruturante o desenvolvimento de cada um destes tipos processos separadamente e em articulação uns com os outros. A grande questão será sempre como promover a comunicação entre estes três processos.

A visualização, que tanto pode ser encarada como um processo cognitivo ou como uma capacidade básica, ampla e polivalente, é indispensável para a aprendizagem da geometria e, de modo mais geral, da matemática. Embora com variações, todas as interpretações da visualização têm em comum a criação, manipulação e transformação de imagens mentais e a necessidade de desenvolver capacidades e competências para a usar. Este estatuto de capacidade básica e indispensável atravessa toda a aprendizagem e liga-se naturalmente com duas orientações fundamentais: a ligação entre a bidimensionalidade e a tridimensionalidade; a valorização das transformações geométricas.

A construção é um tipo de processo cognitivo estruturante em geometria que é radicalmente alterado com a introdução dos ambientes de geometria dinâmica. Construir passou a ser um processo experimental, dinâmico, flexível e que associa outros processos como, por exemplo, medir e representar. Além disso, as ferramentas proporcionadas pelos ambientes de geometria dinâmica articulam e confundem objetos com ferramentas, constituindo por isso ambientes de trabalho em que pensar e agir são duas ações concomitantes, que interagem e se influenciam de maneira nova. As possibilidades oferecidas por estes ambientes para o desenvolvimento dos vários aspetos inerentes ao processo cognitivo de construção são insubstituíveis por qualquer outro tipo de ferramentas. A construção é indissociável da visualização e, na aprendizagem da geometria, tanto uma como outra são prévias ou estão em ligação com o raciocínio. Isto é, ao nível da aprendizagem, não é possível desenvolver o raciocínio sem vivências prévias, ricas e diversificadas, de visualização e construção.

O raciocínio é o processo cognitivo considerado por excelência como característico da matemática. No caso da geometria, este processo está intimamente ligado aos processos de visualização e de construção e esse aspecto distingue-o totalmente do raciocínio em outras áreas da matemática. Neste sentido, a especificação de raciocínio espacial é fundamental pois constitui uma forma de ligar o raciocínio ao modo como os objetos bi e tridimensionais são vistos, manipulados e transformados. O raciocínio visual deve estar presente em toda a escolaridade e é especialmente relevante nos níveis

La enseñanza de la Geometría en el espacio iberoamericano

mais elementares pois contribui para o desenvolvimento de capacidades e competências indispensáveis ao raciocínio matemático nas suas dimensões mais elaboradas, como sejam o raciocínio indutivo e dedutivo. Raciocinar em geometria tem múltiplas perspectivas e complexidades.

Estes três tipos de processos cognitivos constituem traves mestras da atividade geométrica e devem estar na base da operacionalização dos currículos de ensino da geometria. Em cada país os currículos serão naturalmente diferentes, mas terão objetivos comuns. Entre estes destacamos um conjunto de **objetivos** que integram objetivos defendidos por Jones (2000) e Hansen (1998):

- a) Desenvolver competências e capacidades visuais, com especial atenção a aspetos de compreensão visual de modo a desenvolver a consciência espacial, a intuição e o pensamento criativo.
- b) Estabelecer o conhecimento do plano e do espaço, que inclui a exploração e descoberta das propriedades fundamentais das figuras da geometria euclidiana, proporcionando uma amplitude de experiências geométricas a 2 e 3 dimensões.
- c) Preparar os alunos para fazer aplicações da geometria, nomeadamente na resolução de problemas de natureza diversa e na modelização de situações, em contextos da realidade.
- d) Conhecer marcos fundamentais do desenvolvimento da geometria, como sejam “os teoremas de Thales e de Pitágoras, o trabalho de Euclides, a teoria das secções cónicas, as ideias da geometria analítica, a fórmula de Euler para os poliedros e a descoberta das geometrias não euclidiana” (Hansen, 1998, p. 237) e desenvolver a capacidade de os utilizar.
- e) Incentivar o desenvolvimento e uso de conjecturas, raciocínio dedutivo e provas.
- f) Desenvolver competências úteis em TIC em contextos especificamente geométricos.
- g) Gerar uma atitude positiva em relação à matemática.
- h) Desenvolver uma consciência do património histórico e cultural da geometria na sociedade e das aplicações contemporâneas da geometria.

Qualquer conjunto de objetivos de aprendizagem da geometria deve ser encarado numa perspectiva ampla de reconhecimento do particular papel da geometria no conhecimento matemático.

Devido à sua posição ancestral como ciência natural e de design, a geometria está intimamente ligada à sociedade humana, cultura, história, ciência, tecnologia, filosofia, artes e ofícios. O ensino da geometria oferece, portanto, uma ampla oportunidade para descobrir e relacionar as ideias matemáticas com a atividade humana e social. (Niss, 1998b, p. 313)

As **conexões internas e externas** da geometria são por isso mesmo mais uma perspectiva estruturante a considerar no ensino e na aprendizagem em toda a escolaridade. A expressão “matemática e realidade” traduz de modo simples a ideia de que “há uma variedade de maneiras da matemática em geral e a geometria em particular interagir com o mundo real” (Malkevitch, 1998, p. 85). Esta orientação, concordante com os tempos que vivemos, integra naturalmente a perspectiva tecnológica apoiando em todos os sentidos uma abordagem que procura associar a dimensão instrumental com a cultural. É uma componente que deve ter um papel destacado na aprendizagem.

Além do que foi referido, é consensual a ideia de que é necessário perspectivar e criar ambientes de aprendizagem robustos, nos quais os alunos desenvolvam conhecimentos e processos qualificados, valorizando-se por isso a aprendizagem ativa, o trabalho em grupo, a realização de projetos e, naturalmente, a integração de aprendizagens.

La enseñanza de la Geometría en el espacio iberoamericano

Avaliação, Formação de Professores e Desenvolvimento do ensino da geometria

Os aspetos multidimensionais da própria geometria e do seu papel como elemento de ligação entre outros ramos da matemática estão na base da defesa da ideia de que a geometria tem características especiais e oferece oportunidades próprias no que respeita à avaliação. Há três grandes categorias de objetivos de avaliação da geometria (Niss, 1998a). Uma categoria focada na aquisição de conhecimentos, capacidades e competências diretamente relacionados com os tópicos geométricos ensinados, sejam no âmbito da geometria sintética, euclidiana ou não euclidiana, analítica, projetiva ou de outro tipo. Uma segunda categoria centrada nas habilidades e competências de utilização da geometria na compreensão do espaço físico, dos objetos e fenómenos naturais ou resultantes da ação humana. Estas duas categorias são específicas da geometria e não se substituem por objetivos do mesmo tipo de outros ramos da matemática. E, por último, uma terceira categoria de objetivos relacionados com o ensino e aprendizagem da matemática quando trabalhados no âmbito da geometria, funcionando neste caso a geometria em nome da matemática em geral. Por exemplo, neste último caso temos a capacidade de resolver problemas que é inerente à própria matemática e tem objetivos específicos, que tanto estão presentes na resolução de problemas de geometria como de outra área. É o caso do aluno ser capaz de decompor um problema em subproblemas. Porém, há problemas que são específicos da geometria e a sua resolução está focada na utilização da geometria, como seja recorrer a uma transformação geométrica para obter outra perspectiva dos dados e das relações envolvidas na situação a resolver. Neste caso estamos no âmbito da segunda categoria.

O lugar da geometria nos currículos de matemática mudou dramaticamente nas últimas décadas (Niss, 1998b) e é amplamente reconhecido que, muitas vezes, se exige aos professores que ensinem mais geometria do que aquela que aprenderam na sua escolaridade. Esta diferença ainda se reforça mais quando encaramos a evolução tecnológica e concluímos que muitas das ferramentas hoje disponíveis para a aprendizagem da geometria não existiam quando os professores eram alunos ou até quando realizaram a sua formação. Vislumbram-se no campo da formação dois caminhos possíveis interligados entre si. No que respeita à formação inicial, preconizam-se experiências formativas isomórficas das experiências que se pretendem que os professores venham a desenvolver com os seus alunos e defende-se que nestas experiências a formação didática seja ancorada numa formação matemática e vice versa. No que respeita ao desenvolvimento profissional permanente dos professores é desejável também uma dinâmica com múltiplas perspectivas, em que coabitem práticas de colaboração, de formação e de partilha de materiais educativos. Ações de formação acreditadas, comunidades de prática valorizadas e apoiadas, projetos realizados por grupos de professores do mesmo ciclo, da mesma área ou disciplina, ou de disciplinas distintas, divulgação de tarefas experimentadas por professores, são exemplos destas práticas colaborativas.

Uma conclusão fundamental é que não existe um caminho linear estático para decidir sobre que geometria ensinar na escolaridade básica e secundária e, por isso, muitas questões ficam em aberto. Será sempre um caminho em desenvolvimento a trabalhar em colaboração com os professores. E “é desejável que todos os envolvidos nas decisões sobre o currículo de geometria, ou em posições de influência, tenham um conhecimento e compreensão real das necessidades e expectativas da comunidade específica para a qual o currículo é desenhado.” (Jones, 2000, p. 86).

Em síntese — O currículo de geometria no ensino básico e secundário deve ser ensinável e a sua abordagem deve ser instrumental, combinando artefatos físicos e digitais. As decisões curriculares sobre os conteúdos de geometria são influenciadas pelas mudanças que a geometria dinâmica tem trazido à atividade geométrica. Os processos cognitivos visualização, construção e raciocínio são estruturantes. É em função deles que os objetivos de aprendizagem, encarados sob múltiplas perspectivas, devem ser pensados, sempre com uma orientação de estabelecimento de conexões com outros assuntos matemáticos e de compreensão do espaço físico, dos objetos e fenómenos naturais ou

La enseñanza de la Geometría en el espacio iberoamericano

resultantes da ação humana. Do ponto de vista metodológico há que ter em consideração a aprendizagem ativa, o trabalho em grupo, a realização de projetos e a integração de saberes. É um caminho a construir com os professores.

Referências

- Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In Mammana, C., & Villani, V. (Eds.). (1998). *Perspectives on the teaching of Geometry for the 21st century. An ICMI Study*. 37-52. Dordrecht: Kluwer. <https://doi.org/10.1007/978-94-011-5226-6>.
- Fujita, T., Komatsu, K., Enomoto, S., & Obayashi, S. (2025) Theories for the use of both physical and digital tools for developing geometrical reasoning. CERME XIV.
- Hansen, V. L. (1998). General considerations on curricula designs in geometry. In Mammana, C., & Villani, V. (Eds.). (1998). *Perspectives on the teaching of Geometry for the 21st century. An ICMI Study*. 235-242. Dordrecht: Kluwer. <https://doi.org/10.1007/978-94-011-5226-6>.
- Jones, K. (2000), Critical Issues in the Design of the Geometry Curriculum. In: Bill Barton (Ed), *Readings in Mathematics Education*. Auckland, New Zealand: University of Auckland. pp 75-90.
- Laborde, C. (1998). Visual phenomena in teaching/learning of geometry in a computer based-environment. In C. Mammana & V. Villani, Eds. *Perspectives on the teaching of geometry for 21st century*. Kluwer Academic Publishers. 113-121.
- Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K., & Strasser, R., (2006). Teaching and learning geometry with technology. In A. Gutiérrez, P. Boero (eds.). *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*, 275-304. Sense Publishers. 85-99.
- Malkevitch, J. (1998). Geometry and reality. In C. Mammana & V. Villani, Eds. *Perspectives on the teaching of geometry for 21st century*. Kluwer Academic Publishers. 113-121.
- Nemirovsky, R., & Sinclair, N. (2020). On the intertwined contributions of physical and digital tools for the teaching and learning of mathematics. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 6, 107-108.
- Neubrand, M. (1998). The geometry curriculum in Germany: past and future trends. In Mammana, C., & Villani, V. (Eds.). (1998). *Perspectives on the teaching of Geometry for the 21st century. An ICMI Study*. Dordrecht: Kluwer. <https://doi.org/10.1007/978-94-011-5226-6>.
- Neubrand, M. (2024). Multi-perspectivity: a ‘red thread’ through discussions on geometry for teaching and learning. In Lowrie, T., Gutiérrez, A., & Emprin, F. (Eds.), *Proceedings of the 26th ICMI Study Conference (Advances in Geometry Education)* (pp. 223-230). ICMI.
- Niss, M. (1998a). Dimensions of geometry and assessment. In C. Mammana & V. Villani, Eds. *Perspectives on the teaching of geometry for 21st century*. Kluwer Academic Publishers. 263-274.
- Niss, M. (1998b). Teachers qualification an the education of teachers. In C. Mammana & V. Villani, Eds. *Perspectives on the teaching of geometry for 21st century*. Kluwer Academic Publishers. 297-318.
- Sinclair, N., Bartolini Bussi, M. G., de Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A., & Owens, K. (2017). Geometry Education, Including the Use of New Technologies: A Survey of Recent Research. In Gabriele Kaiser (Ed.). *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education — ICME-13*. Springer. Doi: 10.1007/978-3-319-62597-3

La Geometría Dinámica en la enseñanza y aprendizaje de la geometría en el espacio iberoamericano

José Manuel Dos Santos Dos Santos

<https://orcid.org/0000-0002-6830-6503>

La incorporación de sistemas de Geometría Dinámica (DGS) en la educación matemática iberoamericana representa una transformación significativa en los enfoques de enseñanza y aprendizaje de la geometría. Plataformas como GeoGebra, Cabri Geometry, DynBCN, Sketchpad o el *Web Geometry Laboratory* han ampliado las posibilidades de visualización, manipulación y validación de objetos y propiedades geométricas en diversos contextos educativos.

En Portugal, se ha consolidado el uso del *Web Geometry Laboratory* como entorno digital que facilita la colaboración y el aprendizaje autónomo en geometría, con un fundamento epistemológico basado en el constructivismo y el modelo TPACK. La evidencia empírica muestra mejoras notables en la motivación del alumnado, el desarrollo de habilidades de visualización y la formación del profesorado mediante programas especializados orientados al uso de herramientas digitales (Santos et al., 2018; Matos et al., 2023; Galitskaya y Drigas, 2019; Silvestre y Jacinto, 2021).

En España, el desarrollo curricular se ha orientado hacia una integración más profunda de tecnologías como GeoGebra 3D y DynBCN, apoyándose en modelos teóricos como el enfoque ontosemiótico. Esta orientación ha favorecido una comprensión más estructurada de las prácticas matemáticas, mediante el análisis de signos, objetos y procesos involucrados. La inclusión de estrategias didácticas como el *screencasting* y la robótica ha permitido vincular la geometría con competencias digitales y pensamiento computacional (Hidalgo, 2015; Gómez-Chacón y Kuzniak, 2013; Godino et al., 2019).

En América Latina, la difusión de GeoGebra se presenta como fenómeno transversal. En Argentina, su uso ha favorecido el razonamiento espacial y la argumentación mediante tareas de exploración (Villegas et al., 2022). En Bolivia, su aplicación ha sido significativa incluso en contextos con limitaciones tecnológicas, promoviendo una apropiación conceptual de figuras planas y espaciales (Pari Condori et al., 2020). En Brasil, se destaca el uso táctil y colaborativo de los DGS, con énfasis en la visualización tridimensional y el estudio empírico de transformaciones geométricas (Oliveira y Carneiro, 2023).

En Colombia, la relación entre geometría dinámica y pensamiento computacional se ha fortalecido mediante propuestas que integran GeoGebra con entornos como Scratch, potenciando el modelado visual y la lógica algorítmica (Echeverría et al., 2019). En Costa Rica y Cuba, se han incorporado tecnologías emergentes como la realidad aumentada y virtual, favoreciendo el desarrollo de habilidades espaciales y la comprensión manipulativa de cuerpos tridimensionales (Gutiérrez-Araujo y Pazuch, 2023; Anoceto et al., 2014).

Las investigaciones en Ecuador, El Salvador y México reflejan un uso creciente de la geometría dinámica para favorecer tanto el aprendizaje conceptual como la visualización de transformaciones y el razonamiento geométrico (Acosta-Portilla et al., 2023; Maruyama y Kurosaki, 2021; Uriarte-Portillo et al., 2023). Paraguay, Perú y Puerto Rico destacan por su orientación hacia estrategias híbridas, centradas en la alfabetización digital crítica, el aprendizaje móvil y la argumentación visual (Mello-Román y Gómez-Pasquali, 2024; Carlos-Chullo et al., 2020; Feliciano-Semidei, 2019).

Las metodologías predominantes en los estudios analizados son de carácter cualitativo, con una fuerte presencia de la investigación-acción. Sin embargo, se observan aproximaciones mixtas y cuasi-

La enseñanza de la Geometría en el espacio iberoamericano

experimentales en países como Portugal y España, donde se valoran los efectos de la integración curricular de entornos dinámicos mediante observaciones, entrevistas y estudios de caso (Santos et al., 2024; de Brito et al., 2021; Saez-Lacave et al., 2020; Plaza et al., 2020).

El pensamiento computacional representa una dimensión emergente en el uso de la geometría dinámica. Las experiencias más consolidadas se localizan en Portugal, España, Colombia y México, donde se integran lenguajes de programación visual, algoritmos y simulaciones como parte de propuestas orientadas a la lógica deductiva y la abstracción. En Portugal, la combinación de GeoGebra con estructuras algorítmicas ha demostrado su capacidad para promover habilidades como la secuenciación lógica y el pensamiento condicional (Jacinto et al., 2024; Trocado y Dos Santos, 2022). La incorporación de deducción automática en estos entornos fomenta el razonamiento lógico-formal mediante la interacción computacional con propiedades geométricas (Quaresma, Santos y Teles, 2024).

Los avances más notables en retroalimentación automatizada y tutoría inteligente se han desarrollado en Portugal y Brasil. Las tareas diseñadas en GeoGebra permiten generar respuestas adaptadas al comportamiento del estudiante, sin necesidad de intervención directa del docente (Oliveira Dias, 2022; Matos et al., 2023). Estas experiencias se articulan con la formación docente, configurando nuevas formas de enseñanza personalizada y evaluación automatizada.

En relación con la inteligencia artificial, se identifican desarrollos innovadores en Portugal y México. En el caso portugués, se han diseñado entornos interactivos con sistemas de inferencia y análisis del comportamiento estudiantil, capaces de proporcionar orientación personalizada (Quaresma, 2017; Pires et al., 2024). En México, los sistemas de tutoría inteligente permiten identificar patrones de error y proporcionar apoyo en tiempo real (Uriarte-Portillo et al., 2023).

Los estudios de Abar y dos Santos (2020; 2024) ofrecen una visión crítica y formativa sobre el uso de IA y retroalimentación automática en la enseñanza de la geometría. A través del diseño de itinerarios didácticos con tareas estructuradas en GeoGebra, estos trabajos demuestran el potencial de estas herramientas para desarrollar pensamiento computacional, razonamiento algorítmico y visualización dinámica.

La convergencia entre geometría dinámica, inteligencia artificial y pensamiento computacional transforma de manera profunda los marcos didácticos de la educación matemática en Iberoamérica. Este nuevo paradigma exige la redefinición de las competencias docentes, así como la elaboración de modelos pedagógicos que integren eficazmente las tecnologías emergentes en la construcción del conocimiento matemático.

Referencias

- Abar, C. A. A. P., & de Almeida, M. V. (2024). Contributos do GeoGebra para exploração do Pensamento Computacional no contexto da Geometria. *Revista de Matemática, Ensino e Cultura - REMATEC*. <http://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/590>
- Abar, C., & dos Santos, J. M. (2020). Pensamento computacional na Escola Básica na era da inteligência artificial: Onde está o professor. *1º Congresso de Inteligência Artificial da PUC, São Paulo, Brasil*. https://ined.esse.ipp.pt/sites/default/files/2020-12/1%C2%BA%20Congresso%20de%20Intelig%C3%AAncia_ABAR_DOSSANTOS.pdf
- Acosta-Portilla, G., Sánchez-Guerrero, J., Guillermo-Zambrano, R., & Haro-Velasteguí, A. (2023). Use of learning and knowledge technologies (lkt) to dynamize the learning of analytic geometry in high school students. In Á. Rocha, C. H. Fajardo-Toro & J. M. Riola (Eds.), *Developments and*

La enseñanza de la Geometría en el espacio iberoamericano

- advances in defense and security(pp. 129–140). Springer Nature Singapore. https://doi.org/10.1007/978-981-19-7689-6_12
- Anoceto, O. B. M., Pozo, M. A. J., & Sigarreta, J. M. (2014). Cuba: Mathematics and its teaching. In *Mathematics and its teaching in the southern americas* (pp. 193–222). World Scientific. https://doi.org/10.1142/9789814590570_0008
- Carlos-Chullo, J. D., Vilca-Quispe, M., & Castro-Gutierrez, E. (2020, August). Voluminis: An augmented reality mobile system in geometry a!ording competence to evaluating math comprehension. In *Cross reality and data science in engineering* (pp. 288–299).Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-52575-0_23
- Echeverría, L., Cobos, R., Morales, M., Moreno, F., & Negrete, V. (2019). Promoting computational thinking skills in primary school students to improve learning of geometry. *2019 IEEE Global Engineering Education Conference (EDUCON)*, 424–429. <https://doi.org/10.1109/EDUCON.2019.8725088>
- Espinosa-Pinos, C. A., Mazaquiza-Paucar, A. M., & Sánchez Benítez, C. A. (2024). The use of gamification in mathematics education: Enhancing geometry comprehension with high school students. In P. Zaphiris & A. Ioannou (Eds.), *Learning and collaboration technologies* (pp. 17–30). Springer Nature Switzerland. https://doi.org/10.1007/978-3-031-61685-3_2
- Feliciano-Semidei, R. (2019). Use of computer software to do mathematics and the mathematics achievement of students in puerto rico using restricted 2015 naep data. University of Montana. <https://scholarworks.umt.edu/etd/11407>
- Gómez-Chacón, I. M., & Kuzniak, A. (2013). Spaces for geometric work: Figural, instrumental, and discursive geneses of reasoning in a technological environment. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 13 (1), 201–226. <https://doi.org/10.1007/s10763-013-9462-4>
- Gutiérrez-Araujo, R. E., & Pazuch, V. (2023). Enseñanza exploratoria de la geometría com software de geometría dinámica y el aprendizaje del profesorado de matemáticas: Una revisión sistemática. *Uniciencia*, 37 (1), 1–22. <https://doi.org/10.15359/ru.37-1.27>
- Hidalgo, M. R. (2015). Dynben a constructive geometric constraint-based dynamic geometry system. *Computer Science, Mathematics*. <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:14110267>
- Jacinto, H., Ligeiro, C., & Piedade, J. (2024). Desenvolvimento do pensamento computacional e do raciocínio geométrico no 7.º ano: Resultados de uma experiência de ensino. *Quadrante*. <https://quadrante.apm.pt/article/view/37328>
- Maruyama, T. (2022). Strengthening support of teachers for students to improve learning outcomes in mathematics: Empirical evidence on a structured pedagogy program in el salvador. *International Journal of Educational Research*, 115, 101977. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2022.101977>
- Matos, A., Santos, V., & B. Neto, T. (2023). Poly-universe resource for solving geometric tasks by portuguese basic education students. *Open Education Studies*, 5 (1). <https://doi.org/10.1515/edu-2022-0181>
- Mello-Román, J. D., & Gómez-Pasquali, G. (2024). The challenge of improving mathematics teacher training in paraguay and the andean region. The 15th International Congress on Mathematical Education Sydney, 7-14 July, 2024, 1–4. https://www.researchgate.net/profile/Jorge-Mello-Roman/publication/382143280_THE_CHALLENGE_OF_IMPROVING_MATHEMATICS_TEACHER_TRAINING_IN_PARAGUAY_AND_THE_ANDEAN_REGION/links/668f038fc1cf0d77!cbe28b/THE-CHALLENGE-OF-MPROVING-MATHEMATICS-TEACHER-TRAINING-IN-PARAGUAY-AND-THE-ANDEAN-REGION.pdf
- Oliveira Dias, M. (2022). Digital technologies in Mathematics curricula and professional practices of Brazilian and Portuguese teachers. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, 13(2), 215–234. <https://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/4377>
- Oliveira, M. C. A. d., & Carneiro, R. F. (2023). Geometry teaching in the early years: A history that encourages reflections on the present. *Acta Scientiae*, 24 (8), 537–566. <https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.7056>

La enseñanza de la Geometría en el espacio iberoamericano

- Pari Condori, A., Mendoza Velazco, D. J., & Aucchuallpa Fernández, R. (2020). Geogebra as a technological tool in the process of teaching and learning geometry. In *Information and communication technologies* (pp. 258–271). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-62833-8_20
- Pires, A. C., Rocha, F., Guerreiro, T., & Nicolau, H. (2024). Inclusive computational thinking in public schools: A case study from Lisbon. *Interactions*, 31(1). <https://doi.org/10.1145/3665992>
- Quaresma, P. (2017). Towards an intelligent and dynamic geometry book. *Mathematics in Computer Science*, 11(3), 337–349. <https://link.springer.com/article/10.1007/s11786-017-0302-8>
- Quaresma, P., Santos, V., & Teles, J. (2024). Proof exploration using dynamic geometry systems with integrated automated deduction capabilities. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. <https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/0020739X.2024.2377724>
- Santos, V., Quaresma, P., Marić, M., & Campos, H. (2018). Web geometry laboratory: case studies in Portugal and Serbia. *Interactive Learning Environments*, 26(1), 3-21.
- Trocado, A., & Dos Santos, J. (2022). Developing computational thinking in Portuguese mathematics curricula with Collatz conjecture. *Proceedings of ATCM 2022*. <https://atcm.mathandtech.org/EP2022/regular/21972.pdf>
- Uriarte-Portillo, A., Zatarain-Cabada, R., Barrón-Estrada, M. L., Ibáñez, M. B., & González-Barrón, L.-M. (2023). Intelligent augmented reality for learning geometry. *Information*, 14 (4), 245. <https://doi.org/10.3390/info14040245>
- Villella, J., Ferragina, R., Lupinacci, L., Güerci, V., Fioriti, G., Bifano, F., Almirón, A., & Ammann, S. (2022). Teachers who, while using technological devices to teach mathematics, (re) construct their specialised knowledge. *Social Education Research*, 153–169. <https://doi.org/10.37256/ser.4120231833>

Tecnología en la Enseñanza de la Geometría

Tomas Recio Muñiz <recio@nebrija.es>

Universidad Antonio de Nebrija, Madrid, España

El análisis sobre el papel de la tecnología en la enseñanza de la geometría ha de tener en cuenta varios factores. En primer lugar, debe valorar la importancia de la inercia (enseñamos lo que sabemos, lo que aprendimos...) como un factor implícito, de especial relevancia, en el sistema educativo. Así, el debate –tal vez sería mejor hablar de la oposición-- sobre el rol de la tecnología en la educación es muy antiguo. Podemos encontrarlo ya en el rechazo que manifestaba Sócrates hacia la invención de la escritura: “Porque es olvido lo que producirán (*las letras*) en las almas de quienes las aprendan, al descuidar la memoria, ya que, fiándose de lo escrito, llegarán al recuerdo desde fuera, a través de caracteres ajenos, no desde dentro, desde ellos mismos y por sí mismos.”¹ Es evidente que en ese debate subyace un presupuesto esencial: ¿qué consideramos tecnología? Seguramente la mayor parte de los defensores de una metodología “tradicional” en la enseñanza asumen que, por ejemplo, el uso de la escritura, de las imágenes gráficas, las fotografías, los libros, la regla y el compás.... no forman parte de esas herramientas tecnológicas *irruptoras* a las que habría que hacer frente, porque llevamos siglos aprehendiendo e interpretando la realidad con el concurso de tales instrumentos. Por el contrario, la inclusión de tecnologías digitales (datos, información y programas a los que se accede a través de calculadoras, ordenadores y tabletas, teléfonos inteligentes, gafas de realidad virtual, etc.) en el día a día de la enseñanza es considerado por ellos, cuando menos, disruptivo.

La reflexión sobre el rol de estas nuevas tecnologías (más bien: una muestra de su difícil incorporación al aula) aparece ya en el clásico ICMI Study 2, publicado en 1987, cuyo título es *School Mathematics in the 1990's* (Howson and Wilson, 1987), y en el que se afirma (pág. 69) “Even, however, if students were not to see a computer until after they left school, it will be necessary to rethink the curriculum, because of the changes of emphases computers have brought about.” Ahora bien, en el caso de la enseñanza y aprendizaje de la geometría, el debate sobre el papel de la tecnología está fundamentalmente conectado con otro interrogante: ¿enseñanza y aprendizaje... pero de qué geometría? Ese es, sin duda, un segundo factor sin el cual es difícil analizar el rol de la tecnología en la enseñanza de la geometría.

Así, en ese mismo ICMI Study 2 sobre las matemáticas escolares en los años 90 del siglo pasado, se afirma (p. 58) que “Ningún área matemática en particular dentro del currículo escolar despierta tanta preocupación entre los matemáticos como la geometría, cuya enseñanza ha experimentado una transformación total en los últimos treinta años²...” para, a continuación, mencionar las oportunidades que la nueva tecnología podría deparar en los años 90, especialmente en el caso de la geometría:

¹ Platón: Fedro. Traducción y cita recogida de la web de la Cátedra de Filología Hispánica de la Universidad Nacional de La Plata <https://filologiaunlp.wordpress.com/wp-content/uploads/2012/01/fedro.pdf>

² “No particular mathematical area within the school curriculum arouses so much concern amongst mathematicians as does geometry, the teaching of which has undergone a total transformation in the last thirty years or so.”

“Moreover, the introduction of LOGO and other software into classrooms has created new possibilities for student experimentation, particularly with geometry. Perhaps even more challenging, computer-based opportunities for transforming geometry teaching in the 1990's will be provided by computer assisted design software which at the moment has had little impact on schools.” Traducción del autor.

La enseñanza de la Geometría en el espacio iberoamericano

“La introducción de LOGO y otros programas informáticos en las aulas ha creado nuevas posibilidades para la experimentación de los estudiantes, particularmente dentro de la geometría. Quizás aún más desafiantes sean las oportunidades basadas en computadora para transformar la enseñanza de la geometría en la década de 1990, que serán proporcionadas por software de diseño asistido por ordenador que, hasta el momento, han tenido poco impacto en las escuelas.²”

Entendemos que la mención al “computer assisted design software” puede interpretarse, desde la óptica actual, como una referencia, entre otros, a los entonces “futuros” programas de geometría dinámica. Popularizados —con programas de pago— a mediados de los 90, el análisis de su impacto real puede ejemplificarse a través de los datos recogidos por Pérez Sanz (2006) sobre el uso de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) por el profesorado de matemáticas de unos centros de Madrid. Siendo el programa de geometría dinámica Cabri, con un 38%, el tercer programa más usado (tras la hoja de cálculo y Derive) por los profesores que utilizan las TIC en clase, el colectivo de docentes que llevan de manera frecuente las TIC al aula se reduce al 12% del total del profesorado. Y este bajo dato no se debe, fundamentalmente, a la no gratuidad de aquellos programas de geometría dinámica. Así, en la actualidad, es conocido que el programa gratuito GeoGebra tiene más de cien millones de usuarios en todo el mundo³, siendo en la práctica “el” programa de geometría dinámica. Pero, aun asumiendo que todos esos usuarios fueran jóvenes de 12 a 16 años, no representarían --según nuestras estimaciones, sin ánimo de grandes precisiones-- sino alrededor del 15% de la población mundial de esa edad, de nuevo, una cifra muy pequeña y muy similar a la recogida en el estudio de Pérez Sanz, veinte años antes y en un contexto geográfico muy particular.

Para tratar de entender algunas razones detrás de estas cifras, el artículo de Pérez Sanz hace referencia a un hecho relevante: la contradicción existente entre el bajo porcentaje de uso y el importante papel “teórico” que los currículos oficiales (en esa época en España, actualmente la situación es similar) asignan al uso de las tecnologías en la enseñanza de las matemáticas, en muchos casos con referencia expresa a los programas de geometría dinámica. Pero es una referencia que se limita a expresar la importancia de su uso en los objetivos, en la metodología, pero no en los contenidos, que siguen siendo los tradicionales... Sin valorar, como es preciso, que el “medio es el mensaje”⁴, esto es, que el contenido no puede ser independiente de la tecnología usada para enseñarlo, no será posible incorporar las mismas al aula de manera generalizada.

Un testimonio similar, esto es constatación de la falta de cambios en el currículo escolar de la geometría y la urgencia de reconsiderar ese currículo a la luz de los avances tecnológicos, se recoge ya en el precursor artículo de Davis (1995), donde se afirma (pp. 211-212), en el contexto —hoy muy actual— del razonamiento automático y la Inteligencia Artificial:

“Ahora, el enfoque de la geometría de triángulos ha cambiado. La computadora lo ha elevado a un metanivel y, en ese proceso, ha transfigurado el tema. Cientos de teoremas elementales y no

³ Un programa con un especial impacto en el ámbito hispanoamericano. Así, en el GeoGebra Community Gathering 2021 se presentaron datos que señalaban a América como el continente con mayor presencia de usuarios (44%), a México, Colombia, España, Argentina y Brasil, como el segundo, cuarto, octavo, noveno y décimo país, respectivamente, en número de usuarios (10%, 5%, 4%, y 3% (bis) del total de usuarios), al español como la lengua más usada (30% del total de usuarios, 3% uso del portugués). Datos que es preciso valorar teniendo en cuenta la población de cada uno de los países mencionados.

⁴ https://es.wikipedia.org/wiki/El_medio_es_el_mensaje

La enseñanza de la Geometría en el espacio iberoamericano

tan elementales que existían en la literatura son demostrados ahora por una computadora. Se han descubierto muchos teoremas nuevos, de diversas maneras... La geometría del triángulo siempre fue un campo de prácticas para estrategias de demostración, en el espíritu de Euclides, y ahora se ha convertido en un campo de pruebas para estrategias de decidibilidad, demostración y descubrimiento de teoremas. En lo que respecta a la educación matemática, creo que el mensaje es claro. La demostración clásica debe dejarse de lado y compartir el escenario y el tiempo educativos con otros medios para llegar a la evidencia y al conocimiento matemáticos.⁵

No parece, sin embargo, que las afirmaciones de Davis hayan tenido mucho eco. Casi 25 años después, el profesor Balacheff afirma, en el prólogo de un libro sobre educación matemática e inteligencia artificial, que “La IA generó esperanzas en la década de 1970 a través del programa principal de investigación sobre sistemas de tutoría inteligente (ITS)... Sin embargo, la difusión de entornos de aprendizaje basados en IA siguió siendo limitada y todavía lo es...”⁶ (Balacheff, 2021).

En nuestra opinión, esta constatación pesimista puede ser aún más pronunciada en el caso de la geometría y las tecnologías de razonamiento automático, dada la importancia del papel del razonamiento y la argumentación en la geometría elemental. Así, es preciso recordar que ya en un encuentro en París patrocinado por la UNESCO, H. Gelernter (1959) presentó un ordenador IBM 704 con un programa capaz de probar algunos teoremas de geometría euclídea, un logro que él mismo consideraba que nadie hubiera creído posible tres años antes. Pero, más de 60 años después, una investigadora de la talla de G. Hanna aún reclama el “abrir una discusión sobre la enseñanza de la demostración con demostradores automáticos de teoremas”⁷ (Hanna y Yan, 2021).

Y, todavía más recientemente, en un contexto en el que la Inteligencia Artificial está presente en todas partes, el ICMI Study 26 sobre “Advances in Geometry Education” (Lowrie et al. 2024), en el Discussion Document (p. 496), plantea, por una parte, una pregunta sobre el papel de la tecnología en la demostración en geometría, pero limitándose a la geometría dinámica: “¿Cómo los entornos de geometría dinámica afectan a los conceptos de qué debe entenderse por una demostración geométrica o de que es una demostración geométrica?”⁸. Este hecho, la limitación, en este estudio, de la formulación de la cuestión esencial de los cambios curriculares que pueden derivarse del uso de la tecnología en el razonamiento geométrico, a los programas de geometría dinámica, surgidos en los 90 del siglo pasado, y la casi nula presencia de la IA, del razonamiento automático en geometría, etc. en todo el ICMI Study 26 es remarcable. Así, en ese documento, la búsqueda de la expresión “automated provers” en las más de 500 páginas del libro sólo conduce al capítulo del prof. Carvalho

⁵ “The focus of triangle geometry has now been changed. The computer has popped it up a metalevel, and in the process has transfigured the subject. Hundreds of elementary and not so elementary theorems that were in the literature have now been proved by computer. Many new theorems have been discovered, again in a variety of ways ...Triangle geometry always was a practice ground for strategies of proof in the spirit of Euclid, and it has now become a testing ground for strategies of decidability, proof, and theorem discovery. As regards mathematical education, I think the message is clear. Classical proof must move over and share the educational stage and time with other means of arriving at mathematical evidence and knowledge.” Traducción del autor.

⁶ “AI raised hopes in the 1970s with the main stream research program on Intelligent Tutoring Systems (ITS) ...Nevertheless, the dissemination of AI-based learning environments remained limited and still is...” Traducción del autor.

⁷ “Opening a discussion on teaching proof with automated theorem provers”. Traducción del autor.

⁸ “How do dynamic geometry environments affect conceptions of what is meant by geometric proof or what a geometric proof is?” Traducción del autor.

La enseñanza de la Geometría en el espacio iberoamericano

y Silva (2024); y la búsqueda de las palabras “Artificial Intelligence” sólo tiene un par de resultados relevantes, apareciendo en el mencionado capítulo de Carvalho e Silva y en el de Kortenkamp y Larkin (2024), en el que señalan la importancia de formar a los estudiantes para que estos aprendan a determinar la corrección o los fallos de los manipulativos virtuales y de los programas de IA cuando estos abordan problemas geométricos.

Este repaso a los diversos episodios y momentos de la consideración del impacto de la “tecnología” en la enseñanza de la geometría, nos lleva a plantear, como una propuesta abierta al debate de la comunidad educativa,

- a) la necesidad de ser extremadamente realistas sobre las dificultades (ejemplificadas a través de tantas concepciones erróneamente optimistas acaecidas a lo largo de los últimos 60 años, como las que hemos mostrado aquí) de introducir cambios en el currículo educativo en general, y en geometría, en particular.
- b) la urgencia de incorporar al aula la tecnología que nos rodea, que está presente en las vidas de todos y, en particular, de nuestros alumnos. Tenemos que saber enseñar geometría en el aula a través de programas de IA, con tablets, con teléfonos inteligentes que se conecten a programas de razonamiento automático en geometría, como GeoGebra Discovery (al que se puede acceder simplemente vía <https://autgeo.online>, o descargar la aplicación correspondiente en <https://github.com/kovzol/geogebra-discovery>, véase Recio et al. (2020) para una descripción en español de las características de este programa, y Kovács et al. (2022) para una presentación más amplia del mismo, en inglés).
- c) Pero no se trata de usar la nueva tecnología como un instrumento auxiliar de la vieja metodología, sino de emplearla de otra forma. Por ejemplo (véase figura) como un oráculo que responde a las preguntas del alumno que explora, abiertamente, figuras geométricas construidas con geometría dinámica (ver Figura). Respuestas que despiertan en el alumno la curiosidad por encontrar argumentos que interpreten los resultados obtenidos por la máquina, algo que la misma no es capaz de hacer: se interpreta siempre desde una perspectiva humana. Eg. ¿qué propiedades geométricas puede tener la posición del vértice C, en la imagen de la derecha de la figura, que GeoGebra ha ubicado de manera que el doble del producto de los catetos AB y BC sea igual que el cuadrado de la hipotenusa AC?

GeoGebra ofrece sólo una respuesta visual, numérica, sugerente...pero no dice que se trata, por ejemplo, de un triángulo rectángulo isósceles, o un triángulo que tiene el vértice C en el círculo de centro el punto medio de AB y en la mediatriz de dicho segmento...El alumno tendrá que conjeturar, hacer construcciones que se parezcan a la obtenida por GG Discovery...y luego usar de nuevo las herramientas de razonamiento automático para comprobar si la construcción efectuada responde afirmativamente a propiedad buscada, si la conjetura es cierta o no...

- d) La conveniencia de seguir los pasos señalados por Balacheff y Boy de la Tour (2010) sobre los tutores inteligentes⁹, los demostradores automáticos de teoremas, pero que son igualmente

⁹ “Along with providing ATP features for mathematicians, computer-based tutors must take three additional categories of users into account: the curriculum decision makers (who specify the standard of mathematical validation at a given grade), the teachers (who orchestrate learning and decide what counts as a proof in relation to a standard), and the learners (who are simultaneously constructing an understanding of proof and of the related content).” (Balacheff y de la Tour, 2021, p. 356).

La enseñanza de la Geometría en el espacio iberoamericano

válidos para la introducción de cualesquiera otras tecnologías en la enseñanza de la geometría: coordinar los planteamiento y necesidades de los diseñadores de los currículos oficiales, de los profesores encargados de desarrollarlos, y de los alumnos.

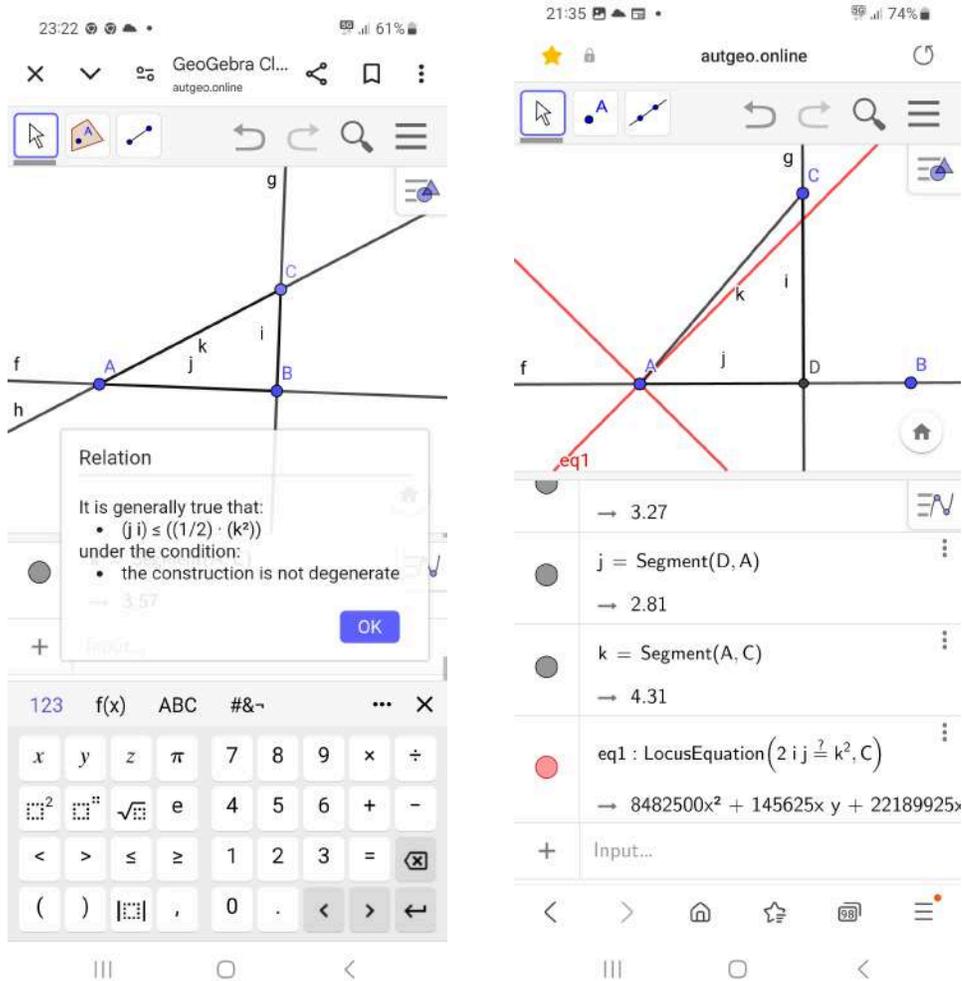


Figura: Imágenes de GeoGebra Discovery (GGD) on-line (via <https://autgeo.online>) en un teléfono móvil. A la izquierda, GGD responde, con la desigualdad $2ji \leq k^2$, a la pregunta: ¿Qué relación tiene el cuadrado de la hipotenusa k y el producto de los catetos, j , i , en un triángulo rectángulo cualquiera? A la derecha, GGD responde a la pregunta: ¿Dónde ubicar el vértice C para que se verifique la igualdad?

Como indican Hanna y Yan (2021), la clave es arrancar ya, organizando y realizando estudios exploratorios sobre el potencial de las nuevas herramientas, con el concurso de las autoridades educativas, de los profesores, de los alumnos¹⁰.

¹⁰ “ Proof assistants that meet the requirements of these stakeholders will never be developed in the absence of initiative on the part of mathematics educators and a demonstrated demand fuelled by increased use. Secondly, success also requires new and effective teaching strategies. These two efforts stand in a reciprocal relationship, so that the full benefit of proof assistants will be seen only over time as new teaching strategies effect the demand for new tool features and vice versa. The responsibility for both efforts rests squarely on the shoulders of educators. The key is to make a start, beginning with

La enseñanza de la Geometría en el espacio iberoamericano

Referencias

Balacheff, N. (2022). Foreword. AI for the learning of Mathematics. In: Richard, P.R., Vélez, M.P., Van Vaerenbergh, S. (eds) *Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence*. Pp. v-x. *Mathematics Education in the Digital Era*, vol 17. Springer, Cham. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-86909-0>

Balacheff, N. y Boy de la Tour, T. (2019). Proof technology and learning in mathematics: common issues and perspectives. In Hanna, G., Reid, D. & de Villiers, M. (Eds.) *Proof Technology in Mathematics Research and Teaching*, 349—365. Springer. Accesible en <https://hal.science/hal-02333646v1>

Carvalho e Silva, J. (2024). Geometry Teaching from Babylon to the Computer Era. In: Lowrie, T., Gutiérrez, A., & Emprin, F. (Eds.). *Proceedings of the 26th ICMI Study Conference (Advances in Geometry Education)*, pp. 159-166. INSPÉ. Université de Reims Champagne-Ardenne. April 23 – 26, 2024. Éditeur/imprimeur: IREM de REIMS. 23 Rue Clément ADER, 51100 Reims (France). ISBN: 978- 2-910076-17-7. Accesible en https://icmistudy26.sciencesconf.org/data/pages/26th_ICMI_Study_Proceedings_2.pdf

Davis, P. J. (1995). The Rise, Fall, and Possible Transfiguration of Triangle Geometry: A Mini-History. *The American Mathematical Monthly*, Vol. 102, No. 3. (Mar., 1995), pp. 204-214. <https://doi.org/10.2307/2975007>

Gelernter, H. Realization of a geometry—Theorem proving machine. English, with English French, German, Russian, and Spanish summaries. Information processing. In *International Conference on Information Processing, UNESCO, Paris 15–20 June 1959*, UNESCO, Paris, R. Oldenbourg, Munich, and Butterworths, London, 1960; Cambridge University Press: Cambridge, UK, 2014; pp. 273–282.

Hanna, G. y Yan, X. (2021). Opening a discussion on teaching proof with automated theorem provers, *For the Learning of Mathematics* 41(3), 42-46 (November, 2021)

Howson, G. y Wilson, B. (eds). (1987). *School Mathematics in the 1990's*. ICMI Study Series, no. 2. Cambridge University Press. Cambridge, UK. Accesible en https://www.mathunion.org/fileadmin/ICMI/ICMI%20studies/ICMI%20Studies%201-5/ICMI_STUDY_02_1986_Kuwait_School_Mathematics_in_the_1990s.pdf Versión en español: Howson, G. y Wilson, B. (1987): *Las matemáticas en primaria y secundaria en la década de los 90 (ICMI, Kuwait 1986)*. Mestral Libros. Valencia. España.

Kortenkamp, U. y Larkin, K. (2024). How Can Virtual Geometry Manipulatives Be Used In Ways That Mitigate Their Ontological, Technological And Pedagogical Limitations? In: Lowrie, T., Gutiérrez, A., & Emprin, F. (Eds.). *Proceedings of the 26th ICMI Study Conference (Advances in Geometry Education)*, pp. 369-376. INSPÉ. Université de Reims Champagne-Ardenne. April 23 – 26, 2024. Éditeur/imprimeur: IREM de REIMS. 23 Rue Clément ADER, 51100 Reims (France). ISBN: 978- 2-910076-17-7. Accesible en

exploratory studies of the potential of these new tools at both the secondary and post-secondary levels.” (Hanna y Yan, 2021, p. 46)

La enseñanza de la Geometría en el espacio iberoamericano

https://icmistry26.sciencesconf.org/data/pages/26th_ICMI_Study_Proceedings_2.pdf

Kovács, Z., Recio, T. Y Vélez, M.P. (2022). Automated reasoning tools with GeoGebra: What are they? What are they good for? In: P. R. Richard, M. P. Vélez, S. van Vaerenbergh (eds): Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence: How Artificial Intelligence can serve mathematical human learning. Series: Mathematics Education in the Digital Era, Springer, 2022, pp. 23-44. https://doi.org/10.1007/978-3-030-86909-0_2.

Lowrie, T., Gutiérrez, A. y Emprin, F. (Eds.), (2024). Proceedings of the 26th ICMI Study Conference (Advances in Geometry Education), INSPÉ. Université de Reims Champagne-Ardenne. April 23 – 26, 2024. Éditeur/imprimeur: IREM de REIMS. 23 Rue Clément ADER, 51100 Reims (France). ISBN: 978- 2-910076-17-7. Accesible en https://icmistry26.sciencesconf.org/data/pages/26th_ICMI_Study_Proceedings_2.pdf

Pérez Sanz, A. (2006). El profesorado de matemáticas ante las Tecnologías de la Información y la Comunicación. La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, Vol. 9 (2). Pp. 521-544.

Recio, T., Van Vaerenbergh, S. y Vélez, M. P. (2020). Herramientas de Razonamiento Automático en GeoGebra: qué son y para qué sirven. Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática. Año XVI - Número 59. Agosto 2020, páginas 08-15. <https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/202>

La enseñanza de la Geometría en el espacio iberoamericano

Tabla de Contenido

La enseñanza de la Geometría en el espacio iberoamericano	1
Introducción general	2
La enseñanza de la Geometría en México	5
La enseñanza de la Geometría en España	8
La Enseñanza de la Geometría desde la Cosmovisión Andina de Perú	11
Novas propostas para o ensino da Geometria	14
La Geometría Dinámica en la enseñanza y aprendizaje de la geometría en el espacio iberoamericano	19
Tecnología en la Enseñanza de la Geometría	23